Διαφορικές Εξισώσεις 28/11/16

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$, a_i : σταθερές, $x \in \mathbb{R}$
$P(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$, (χ.π.)

Θεώρημα:
Ας είναι $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ διακριτές ρίζες του P με πολλ/τα $m_1, \dots, m_s$ αντίστοιχα, τότε οι συναρτήσεις $x^j e^{\lambda_i x}$, $j = 0, \dots, m-1$, $(i = 1, \dots, s)$ αποτελούν ένα β.σ.λ της (E_0).

Άσκηση του βιβλίου: $y'' - 9y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 9 < {3 \atop -3}$

β.σ.λ $\{e^{-3x}, e^{3x}\}$ $x \in \mathbb{R}$

Άσκηση του βιβλίου:
$y''' - 13y' - 12y = 0$
$P(\lambda) = \lambda^3 - 13\lambda - 12$

1	0	−13	−12	−1
	−1	+1	12	
1	−1	−12	0	

$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$
$\Delta = 1 + 48 = 49$
$\lambda_1, \lambda_2 = < {4 \atop -3}$

β.σ.λ $\{e^{-x}, e^{-3x}, e^{4x}\}$

Θεώρημα:
Υποθέτουμε ότι $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, n)$
I) Αν Y λύση της (E_0) τότε και οι $Re\, y(x)$, $Im(y(x))$ είναι λύσεις της (E_0)
II) Κάθε λύση Y με πραγματικές αρχικές τιμές είναι πραγματική.

III) Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ β.σ.λ. πραγματικών, τότε y πραγματική λύση $\Longleftrightarrow \exists\, c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$:
$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$

IV) Ας είναι $\lambda_1 = \sigma_1 + i\tau_1 \;\dots\; \lambda_r = \sigma_r + i\tau_r$ ($\sigma_i,\tau_i\in\mathbb{R}$, $\tau_i \neq 0$) διακριτές ρίζες του P πολ/τας $m_1,\dots,m_r$ αντίστοιχα και $\lambda_{2r+1},\dots,\lambda_s$ πραγμ. ρίζες του P πολ/τας $m_{2r+1},\dots,m_s$ αντίστοιχα.
Τότε οι συναρτήσεις $x^j e^{\sigma_i x}\cos(\tau_i x)$, $x^j e^{\sigma_i x}\sin(\tau_i x)$ $[i=1,\dots,r]$ και $x^j e^{\lambda_i x}$ $[i=2r+1,\dots,s]$, $(j=0,\dots,m-1)$ αποτελούν ένα β.σ.λ. της (E_0) με πραγματικές συναρτήσεις.

Απόδειξη:

I) Ας είναι y λύση της (E_0) δηλαδή $L(y)=0$ τότε $L(Re\,y + i\,Im\,y) = 0 \Rightarrow L(Re\,y) + i\,L(Im\,y) = 0$
$\Rightarrow L(Re\,y) = 0$, $L(Im\,y) = 0$ δηλ. $Re\,y$, $Im\,y$ λύσεις της (E_0).

II) Ας είναι y λύση της (E_0) με πραγμ. αρχ. τιμές. Για $y(x) = Re\,y(x) + i\,Im\,y(x)$ είναι η συνάρτηση $Im\,y$ είναι λύση της (E_0) (από το I) με αρχικές τιμές $(Im\,y)(x_0) = 0 \dots (Im\,y)^{(n-1)}(x_0) = 0$ $(y(x_0),\dots,y^{(n-1)}(x_0)\in\mathbb{R})$ δηλ. η $Im\,y$ είναι λύση του ΠΑΤ $L(y)=0$
$(Im\,y)(x_0) = 0 = \dots = (Im\,y)^{(n-1)}(x_0)$ άρα από το Θ. μοναδικότητας $Im\,y = 0$

III) $(\Longleftarrow)$ προφανές
$(\Longrightarrow)$: Υποθέτω ότι η y είναι πραγμ. λύση και έχω ότι $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$
Επειδή η y είναι πραγμ. συνάρτηση θα έχουμε

$0 = Im\,y(x) = Im(c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x))$

$0 = y_1(x)\,Im(c_1) + \dots + y_n(x)\,Im(c_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow Im(c_1) = \dots = Im(c_n)$

• $y'' + k^2 y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + k^2 < \begin{matrix} ki \\ -ki \end{matrix}$

θσλ $\{\cos(kx), \sin kx\}$

<u>Εφαρμογή</u>: $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

$\Delta > 0$ θσλ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, x \in \mathbb{R}\}$

$\Delta < 0$ $\sigma \pm i\tau$ $\{\sigma, \tau \in \mathbb{R}, \tau \neq 0\}$ $\{e^{\sigma x}\cos\tau x, e^{\sigma x}\sin\tau x, x \in \mathbb{R}\}$

$\Delta = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$

<u>π.χ</u>: $y'' - 2y' + y = 0$, $y_0(0) = 0$, $y_0'(0) = 1$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, $\lambda = 1$ διπλή

θσλ $\{e^x, xe^x\}$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y_0(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y_0'(0) = c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

<u>π.χ</u>: $y'' + 4y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

θσλ $\{e^{0x}\cos 2x, e^{0x}\sin 2x\} = \{\cos 2x, \sin 2x\}$

$y(x) = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$

$c_2 = 1$

$-2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(x) = \sin 2x$

Άσκηση:
Θεωρούμε την εξίσωση $y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega x)$
$x>0$ ($A, \omega > 0$) Νδο $\forall y$ είναι $\limsup_{x\to+\infty}|y(x)| = +\infty$
και να βρεθεί η λύση y_0 με $y_0(0)=0$ $y_0'(0)=1$

Λύση:

$y'' + \omega^2 y = 0$ η ομογενής εξίσωση έχει χ.π.
$P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

Ένα θ.σ.λ. πραγματικών είναι η $\{\cos\omega x, \sin\omega x, x\in\mathbb{R}\}$

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix}^{2} = \omega$$

$$W_1(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin\omega x \\ 1 & \omega\cos\omega x \end{vmatrix} = -\sin\omega x$$

$$W_2(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos\omega x & 0 \\ -\omega\sin\omega x & 1 \end{vmatrix} = \cos\omega x$$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(s)}{W(y_1,y_2)(s)} \cdot \frac{A\cos(\omega s)}{1}ds +$$

$$+ y_2(x)\int_0^x \frac{W_1(y_1,y_2)(s)}{W(y_1,y_2)(s)} \frac{A\cos(\omega s)}{1}ds =$$

$$= \dots = -\frac{A}{2\omega}\cos(\omega x)\sin(2\omega x) + \frac{A\sin\omega x \sin 2\omega x}{4\omega^2} +$$

$$+ \frac{A\sin\omega x}{2\omega} = \frac{A}{2\omega} x\sin(\omega x), \ x \geq 0$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $y(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x +$
$+ \frac{A}{2\omega} x\sin\omega x$

Παρατηρώ ότι:

$\cos(\omega x_\nu) = \cos(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = 0, \nu \in \mathbb{N}$

$\sin(\omega x_\nu) = \sin(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = 1, \nu \in \mathbb{N}$

$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = \lim (2\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = +\infty$

$\lim_{\nu \to \infty} y_\nu = \lim_{\nu \to \infty} [c_1 \cos(\omega x_\nu) + c_2 \sin(\omega x_\nu) + \frac{A}{2\omega} x_\nu \sin(\omega x_\nu) =$

$= \lim_{\nu \to \infty} [c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \frac{1}{2\nu} x_\nu] = +\infty$

$\limsup_{\nu \to \infty} (y_\nu) = +\infty$, ομοίως $\liminf_{\nu \to \infty} (y_\nu) = -\infty$

<u>Σπίτι</u>: Θεωρούμε την εξίσωση $y'' - 2by + c = 0$ αν y_0 είναι μια λύση με $y_0(0) = 0 = y_0(1)$ νδο $y(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Άσκηση 5 σελ 113</u>:

$y''' - y = 3\log x, x > 0$

$y''' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1), \Delta = -3$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y_1(x) = e^x$

$y_2(x) = e^{-1/2 x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$y_3(x) = e^{-1/2 x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-1/2 x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x & e^{-1/2 x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \\ e^x & \cdot & \cdot \\ e^x & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \dots$$

$W_1(y_1, y_2, y_3)(x) = \dots, W_2(x) = \dots, W_3(x) = \dots$

$y(x) = y_1(x) \int_0^x \quad + y_2 \int_0^x \quad + y_3 \int_0^x \quad = \dots$